



基于改进典范分解的嵌套阵列 DOA 估计

程思备, 骆晓, 蒋博筹, 王玉婷, 吴寰宇
(重庆信息通信研究院, 重庆 401336)

摘要: 为了避免在对嵌套阵列做 DOA 估计时进行空域峰值搜索, 将典范分解应用于嵌套阵列, 通过单次奇异值分解、双线性映射和张量分解得到阵列导向量矩阵和入射角。但现有典范分解算法只适用于无噪条件, 通过两次奇异值分解改进了该算法, 使其在无噪和有噪条件下均适用。仿真结果表明: 在相同信噪比、快拍数情况下, 基于改进典范分解的嵌套阵列 DOA 估计算法相比 MUSIC、空间平滑算法具有更好的估计性能和更少的运算时间。

关键词: 嵌套阵列; DOA 估计; 典范分解; 奇异值分解

中图分类号: TP393

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2021119

Improved CPD based DOA estimation of nested array

CHENG Sibe, LUO Xiao, JIANG Bochou, WANG Yuting, WU Huanyu
Chongqing Academy of Information and Communications Technology, Chongqing 401336, China

Abstract: In order to avoid searching the peak value in space domain, when estimating nested array's the direction of arrival(DOA), the canonical polyadic decomposition(CPD) was applied into the nested array, namely using the one time singular value decomposition(SVD), bilinear mapping and tensor decomposition to obtain the steering vector matrix and arrival angle. However, the existing CPD algorithm only can be applied in noiseless environment, the algorithm was improved by utilizing SVD two times, and was made to be applied in both noiseless and noisy environments. The simulation results demonstrate that in the same signal to noise ratio(SNR) and snapshot, the DOA estimation algorithm of nested array based on the improved CPD has better performances and less running time than the MUSIC and space smoothing algorithms.

Key words: nested array, DOA estimation, canonical polyadic decomposition, singular value decomposition

1 引言

在阵列信号处理中, 更高的自由度 (degree of

freedoms, DOF) 往往能够带来更高的输出信噪比、更低的旁瓣、更低的克拉美罗下界 (Cramer-Rao lower bound, CRLB) 等。与均匀线阵 (uniform

收稿日期: 2021-03-17; 修回日期: 2021-06-10

通信作者: 骆晓, luoxiao@caict.ac.cn

基金项目: 重庆市技术创新与应用发展专项重点项目 (No.cstc2020jscx-cylhX0004)

Foundation Item: Chongqing Technology Innovation and Application Development Special Key Project (No.cstc2020jscx-cylhX0004)

linear array, ULA) 相比, 非均匀线阵 (nonuniform linear array, NLA) 因为其稀疏特性能够在相同阵元数的情况下, 获得更高的 DOF^[1]。常见的非均匀线阵有最小不冗余阵 (minimum redundancy array, MRA)^[2]、互质阵列 (co-prime array)^[3-4] 以及嵌套阵列 (nested array)^[5]。

参考文献[2]结合 MRA 结构提出了基于扩展矩阵的算法, 该算法的确能达到增加 DOF 的目的, 从而获得更优异的处理性能。但是在给定阵元数的情况下, MRA 的布阵方式没有相应的解析表达式, 只能通过迭代算法得到其阵元位置, 因此该阵列通用性较差。2010 年, 嵌套阵列的概念和数学模型首次被提出, 该阵列由两个或者多个阵元间隔不同的均匀线阵连接而成, 当阵元数和阶数确定后其阵元位置表达式可由固定计算式直接给出^[5], 近几年已经成为非均匀阵列领域研究的热点。参考文献[6]提出了超级嵌套阵列 (super nested array) 的布阵方式, 该方式保留了嵌套阵列增加自由度优点的同时也能够减少阵元间的互耦。对于嵌套阵列的 DOA 估计, 现有参考文献采用多重信号分类 (multiple signal classification, MUSIC)^[7]、传播因子与 MUSIC 结合^[8]、酉变换矩阵重构与 MUSIC 结合^[9]等算法, 上述算法需要在角度域进行峰值搜索, 计算量较大。传统的旋转平移不变技术 (estimating signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT) 不需要进行峰值搜索, 它利用均匀阵列的导向量矩阵为范德蒙德矩阵 (Vandermonde matrix), 其具有全局平移不变的特性, 将阵列分为去顶和去底的子阵列, 而通过求解子阵列协方差矩阵特征向量之间的旋转因子来完成 DOA 估计^[10], 但是全局平移不变特性不具有普遍性, 只有均匀阵列具有该特性, 大多数阵列只有局部平移不变特性, 因此传统的 ESPRIT 算法不适用于嵌套阵列的 DOA 估计。

参考文献[11-13]利用了非均匀线阵局部平移

不变特性 (将非均匀线阵分为若干个的子阵列, 每个子阵列为均匀线阵, 其导向量矩阵均为范德摩尔矩阵, 具有平移不变性), 将子阵列导向量矩阵构造转化为三阶张量的构造, 最后利用典范分解求解三阶张量的水平切片, 得到非均匀线阵的导向量矩阵, 最后利用最小二范数法则完成 DOA 估计。ESPRIT 算法与基于典范分解的 DOA 估计算法类似, 都利用范德摩尔矩阵平移不变特性, 不同的是 ESPRIT 算法利用全局特性而 DOA 估计算法利用的是局部特性, 因此基于典范分解的 DOA 估计方法被认为是 ESPRIT 算法的延伸, 被定义为 “Multiple Invariance ESPRIT”^[13]。但是在参考文献[13]中, 快拍 (Snapshot) 信号模型不含噪声成分, 作者指出该算法只适用于无噪声环境的假设前提, 而在实际环境中噪声普遍存在, 通过仿真发现在有背景噪声的条件下, 算法的鲁棒性急剧下降, 甚至出现无解。如果将此算法应用于实际工程, 必须对其进行改进优化。

本文结合含有噪声成分的二阶嵌套阵列信号模型, 提出了改进的典范分解的嵌套阵列 DOA 估计算法, 并对该算法进行了仿真, 得到了相同信噪比和快拍数情况下, 该算法和直接 MUSIC、空间平滑算法, 以及克拉美罗下界^[14]的均方根误差对比图。仿真表明改进的典范分解算法适用于含噪条件下的二阶嵌套阵列 DOA 估计, 且与参考文献[5, 8]中提到的算法相比, 具有更好的 DOA 估计性能。

2 二阶嵌套阵列信号模型

N 阵元的二阶嵌套阵列结构如图 1 所示, 由两个均匀线阵连接而成: 第一阶被称为内部均匀线阵 (inner ULA), 含有 N_1 个阵元且阵元间隔为 $d = \lambda / 2$, λ 为接收信号波长; 第二阶被称为外部均匀线阵 (outer ULA) 含有 N_2 个阵元且阵元间隔为 $(N_1 + 1)d$ 。当 N 为偶数时, $N_1 = N_2 = N / 2$; 当 N 为奇数时 $N_1 = (N - 1) / 2$,



$N_2 = (N+1)/2$ 。假设有 R 个窄带互不相关的信号从方向为 $\theta_i, (i=1, 2, \dots, R)$ 的远场空间入射该二阶嵌套阵列，其 K 次接收快拍矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times K}$ 表示为：

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W}_n \quad (1)$$

其中，矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times R}$ 为入射信号的导向量矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_R)]$ ，向量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 表示入射角度为 θ_i 的信号的导向量，向量 $\mathbf{s}_i$ 表示其 K 次采样，矩阵 $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_R]^T \in \mathbb{C}^{R \times K}$ ，上标符号 T 表示矩阵转秩，矩阵 $\mathbf{W}_n \in \mathbb{C}^{N \times K}$ 表示所有阵元 K 次快拍接收的噪声分量，噪声为高斯白噪声满足正态分布，均值为 0，方差为 σ_n^2 。

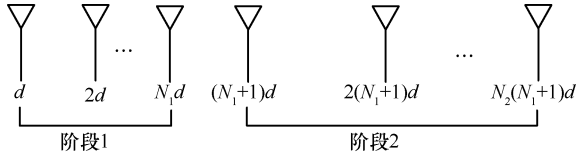


图1 二阶嵌套阵列结构

3 基于改进典范分解的嵌套阵列 DOA 估计算法

3.1 典范分解算法基本原理

根据参考文献[13]，假设 K 次接收快拍 $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{S}$ 不含噪声成分，对其做奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 得到 $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\bar{\mathbf{V}}^H$ ，上标符号 H 表示矩阵共轭转秩， $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ 是有奇异值从大到小排列而成的对角矩阵， $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{N \times R}$ ， $\bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{R \times K}$ 分别为与各个奇异值对应的左特征向量矩阵和右特征向量矩阵。一定存在矩阵 $\bar{\mathbf{F}} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ ，使得 $\bar{\mathbf{U}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{F}}^T$ 。对矩阵 $\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ 做双线性谱图函数映射得到矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ ，双线性谱图函数映射目的是通过线性映射改变矩阵元素使其满足典范分解的约束条件^[12]，求解矩阵 $(\bar{\mathbf{Q}}^H \bar{\mathbf{Q}}) \in \mathbb{C}^{\frac{R(R+1)}{2} \times \frac{R(R+1)}{2}}$ 的核得到矩阵 $\bar{\mathbf{M}}^r$ 即 $\bar{\mathbf{Q}}^H \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{M}}^r = 0$ 。求解矩阵 $\bar{\mathbf{M}}^r$ 广义特征值，即 $\bar{\mathbf{M}}^r = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{G}}^H$ ，矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 为对角矩阵，且 $\bar{\mathbf{G}}^{-1} = \bar{\mathbf{F}}$ ，

上标符号 $^{-1}$ 表示矩阵求逆，故导向量矩阵 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{U}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}\bar{\mathbf{G}}^T$ ，利用求解得到的导向量矩阵估计入射信号角度。

典范分解算法直接对接收快拍做 SVD 和双线性谱图函数映射，实质上是对接收数据做一阶矩处理，在接收快拍不含噪声成分时，矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ 不含噪声成分， $\bar{\mathbf{Q}}^H \bar{\mathbf{Q}}$ 为非满秩矩阵，它的核存在非零解，但是当接收快拍中含有噪声成分时，即接收快拍为 $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{W}_n$ 而不再是 $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{S}$ ，一阶矩处理无法将信号和噪声分离，矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ 含有噪声成分，利用直接求核的方法得到的矩阵 $\bar{\mathbf{M}}^r$ 只含 0 元素，无法估计导向量矩阵和入射角度。

3.2 改进典范分解与嵌套阵列

改进典范分解算法不再采用原来算法中对 $\bar{\mathbf{Q}}^H \bar{\mathbf{Q}}$ 求核得到矩阵 $\bar{\mathbf{M}}^r$ 的方法，而采取对 $\bar{\mathbf{Q}}^H \bar{\mathbf{Q}}$ 做 SVD 利用噪声子空间对应的右特征向量矩阵求得矩阵 $\bar{\mathbf{M}}^r$ ，进而可以求得导向量矩阵并估计入射信号角度，结合二阶嵌套阵列的接收快拍模型，其原理如下。

得到二阶嵌套阵列的 K 次接收快拍 $\mathbf{X}$ 后对其做 SVD 得到：

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H = [\mathbf{U}_R \ \mathbf{U}_{N-R}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_R & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_{N-R} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_R \ \mathbf{V}_{N-R}]^H \quad (2)$$

其中， $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ 是有奇异值从大到小排列而成的对角矩阵，矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times K}$ ，矩阵 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ 分别为与各个奇异值对应的左特征向量矩阵和右特征向量矩阵。 $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}(:, 1:R)$ ， $\boldsymbol{\Sigma}_s \in \mathbb{C}^{R \times R}$ 为信号空间对应的奇异值对角矩阵，且 $\boldsymbol{\Sigma}_R = \boldsymbol{\Sigma}(1:R, 1:R)$ 。参考文献[11, 14]，一定存在矩阵 $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ ，使得 $\mathbf{U}_R \boldsymbol{\Sigma}_R = \mathbf{A}\mathbf{F}^T$ 。定义矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{N \times R}$ 且 $\mathbf{Y} = \mathbf{U}_R \boldsymbol{\Sigma}_R$ 。

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(1:N_1, :) \\ \mathbf{Y}(N_1+1:N, :) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(1)} \\ \mathbf{Y}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\mathbf{A}(\theta) = \text{diag}(e^{-j2\pi \frac{N_1 d}{\lambda} \sin(\theta_1)} \dots e^{-j2\pi \frac{N_1 d}{\lambda} \sin(\theta_R)})$ 表示 $R \times R$ 的对角矩阵，被称为阶间旋转因子矩阵，其维度由入射信号个数决定，对角元素由入射信号

角度和阶间阵元距离差共同决定, 根据二阶嵌套阵列结构特性可得 $\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(1)} \times \mathbf{A}(\theta)$ 。定义矩阵 $\overline{\mathbf{Y}}^{(1)}$ 表示去掉矩阵第一行得到的子矩阵, $\overline{\mathbf{Y}}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(1)}(2:N_1, :)$, 矩阵 $\underline{\mathbf{Y}}^{(1)}$ 表示去掉矩阵最后一行得到的子矩阵, $\underline{\mathbf{Y}}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(1)}(1:N_1-1, :)$ 。同理可得矩阵 $\overline{\mathbf{Y}}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(2)}(2:N_2, :)$, $\underline{\mathbf{Y}}^{(2)} = \mathbf{Y}^{(2)}(1:N_2-1, :)$ 。 J_n 表示向量 $\mathbf{J}$ 的第 n 个元素 $J = [N_1-1 \ N_2-1]$, 定义矩阵 $\mathbf{Y}_{\text{red}} \in C^{\sum_{n=1}^2 2J_n \times R}$:

$$\mathbf{Y}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\text{red}}^{(1)} \\ \mathbf{Y}_{\text{red}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Y}}^{(1)} \\ \underline{\mathbf{Y}}^{(1)} \\ \overline{\mathbf{Y}}^{(2)} \\ \underline{\mathbf{Y}}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

定义矩阵 $\mathbf{Y}_{\text{red}}^{(n)} = [\mathbf{y}_1^{(n)}, \dots, \mathbf{y}_R^{(n)}]$, 向量 $\overline{\mathbf{y}}_r^{(n)} = \text{vec}(\mathbf{Y}_{\text{red}}^{(n,r)}) = \begin{bmatrix} u_r^{(1,n)} \\ u_r^{(2,n)} \end{bmatrix} \in C^{2J_n \times 1}$, $\text{vec}()$ 表示矩阵列向量化函数。矩阵 $\mathbf{Y}_{\text{red}}^{(n,r)} = \text{unvec}(\overline{\mathbf{y}}_r^{(n)}) = [u_r^{(1,r)} u_r^{(2,r)}] \in C^{J_n \times 2}$, $\text{unvec}()$ 表示去向量化函数, 双线性谱图函数^[15]定义为:

$$\phi^{(n)}(x, y)_{(i-1)4J_n+4(j-1)+2(k-1)+l} = x_{ik} y_{jl} + y_{ik} x_{jl} - x_{il} y_{jk} - y_{il} x_{jk} \quad (5)$$

其中, $i, j \in [1, \dots, J_n]$, $k, l \in [1, 2]$ 。

定义函数 $\phi_{r,s}^{(n)} = \phi^{(n)}(\mathbf{Y}_{\text{red}}^{(n,r)}, \mathbf{Y}_{\text{red}}^{(n,s)})$, 构造一个新的矩阵 $\mathbf{Q} \in C^{4(\sum_{n=1}^2 J_n^2) \times \frac{R(R+1)}{2}}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{(1)} \\ \mathbf{Q}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{(1,1)} & 2\mathbf{Q}^{(2,1)} \\ \mathbf{Q}^{(1,2)} & 2\mathbf{Q}^{(2,2)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}^{(1,n)} = [\phi_{1,1}^{(n)}, \dots, \phi_{R,R}^{(n)}] \in C^{4J_n^2 \times R} \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}^{(2,n)} = [\phi_{1,2}^{(n)}, \dots, \phi_{R-1,R}^{(n)}] \in C^{4J_n^2 \times \frac{R(R-1)}{2}} \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \sum_{n=1}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{(1,n)H} \mathbf{Q}^{(1,n)}, & 2\mathbf{Q}^{(1,n)H} \mathbf{Q}^{(2,n)} \\ 2\mathbf{Q}^{(2,n)H} \mathbf{Q}^{(1,n)}, & 4\mathbf{Q}^{(2,n)H} \mathbf{Q}^{(2,n)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

如第 3.1 节所述, 矩阵 $\mathbf{Q}$ 含有噪声成分, 如果按照典范分解的方法采用直接求核的方法得到的矩阵 $\overline{\mathbf{M}}^r$ 只含 0 元素, 无法估计导向量矩阵和入射角度。参考文献[16]利用信号和噪声在二阶统计

量空间正交的特性, 采用奇异值分解将矩阵 $\mathbf{Q}$ 的协方差矩阵分解为正交的信号子空间和噪声子空间, 再利用噪声子空间得到矩阵 $\mathbf{M}^r$, 过程如下: 对 $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q}$ 做奇异值分解得到 $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{U}_l \boldsymbol{\Sigma}_l \mathbf{V}_l^H$, 取 $\boldsymbol{\Sigma}_l$ 中 R 个最小的奇异值构成递增排列集合 $\sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_R]$, 即 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_R$, 该集合中每个元素作为奇异值时所对应的右特征向量被定义为 $\mathbf{m}^{(r)} \in C^{\frac{R(R+1)}{2} \times 1}$, 将 $\mathbf{m}^{(r)}$ 的元素下角标定义为 $\mathbf{m}^{(r)} = [m_{1,1}^{(r)}, m_{2,2}^{(r)}, \dots, m_{R,R}^{(r)}, m_{1,2}^{(r)}, m_{1,3}^{(r)}, \dots, m_{R-1,R}^{(r)}]$

重新排列各元素得到矩阵:

$$\mathbf{M}^r = \begin{bmatrix} m_{1,1}^{(r)} & m_{1,2}^{(r)} & \dots & m_{1,R}^{(r)} \\ m_{2,2}^{(r)} & m_{2,2}^{(r)} & \dots & m_{2,R}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1,R}^{(r)} & m_{2,R}^{(r)} & \dots & m_{R,R}^{(r)} \end{bmatrix} \in C^{R \times R} \quad (10)$$

得到矩阵 $\mathbf{M}^r$ 后, 将求解矩阵 $\mathbf{F} \in C^{R \times R}$ 的问题转化问联合对角化的问题, 即求解矩阵 $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^1 &= \mathbf{G} \mathbf{A}^1 \mathbf{G}^H \\ \mathbf{M}^2 &= \mathbf{G} \mathbf{A}^2 \mathbf{G}^H \\ &\vdots \\ \mathbf{M}^R &= \mathbf{G} \mathbf{A}^R \mathbf{G}^H \end{aligned} \quad (11)$$

当 $R=2$ 时, 即入射信号个数为两个, 联合对角化问题退化为广义特征值分解 (generalized eigenvalue decomposition, GEVD) 问题, 当 $R \geq 3$ 时, 需用迭代算法求解数值解, 可参考文献[16-18]。求得矩阵 $\mathbf{F}$ 后, 利用 $\mathbf{U}_R \boldsymbol{\Sigma}_R = \mathbf{A} \mathbf{F}^T$, 求解得到导向量矩阵 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_R)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{N_1 d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-j2\pi \frac{N_1 d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-j2\pi \frac{N_1 d}{\lambda} \sin(\theta_R)} \\ e^{-j2\pi \frac{(N_1+1)d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-j2\pi \frac{(N_1+1)d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(N_1+1)d}{\lambda} \sin(\theta_R)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{N_2(N_1+1)d}{\lambda} \sin(\theta_1)} & e^{-j2\pi \frac{N_2(N_1+1)d}{\lambda} \sin(\theta_2)} & \dots & e^{-j2\pi \frac{N_2(N_1+1)d}{\lambda} \sin(\theta_R)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

定义导向量矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 列列向量为 $\mathbf{A}^{ci}$,



$\mathbf{a}(\theta_i)^{(1)} = \mathbf{A}^i(1:N_1)$, $\mathbf{a}(\theta_i)^{(2)} = \mathbf{A}^i(N_1+1:N)$ 可得 $\mathbf{a}(\theta_i)^{(2)} = e^{-j2\pi\frac{N_1d}{\lambda}\sin(\theta_i)} \mathbf{a}(\theta_i)^{(1)}$, 定义以下函数 $f(\theta_i) = \frac{(\mathbf{a}(\theta_i)^{(2)})^H (\mathbf{a}(\theta_i)^{(1)})}{(\mathbf{a}(\theta_i)^{(1)})^H (\mathbf{a}(\theta_i)^{(1)})}$, 则入射角 θ_i 的计算

式为:

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{\lambda \ln(f(\theta_i))}{-j2\pi N_1 d}\right) \quad (13)$$

算法步骤归纳如下:

步骤 1 输入接收快拍 $\mathbf{X} = \mathbf{AS} + \mathbf{W}_n$, 做奇异值分解得到 $\mathbf{Y} = \mathbf{U}_R \boldsymbol{\Sigma}_R$;

步骤 2 对 $\mathbf{Y}$ 进行分组重排得到 $\mathbf{Y}_{\text{red}}^{(n,r)}$, 利用函数 $\phi_{r,s}^{(n)}$ 得到矩阵 $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q}$;

步骤 3 对 $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q}$ 进行奇异值分解, 对奇异值和右奇异值向量进行重排得到矩阵 $\mathbf{M}^r$;

步骤 4 对 $\mathbf{M}^r$ 进行联合对角化, 求得矩阵 $\mathbf{F}$;

步骤 5 利用 $\mathbf{U}_R \boldsymbol{\Sigma}_R = \mathbf{AF}^T$, 求得导向量矩阵 $\mathbf{A}$;

步骤 6 利用式 (13) 求得入射角度 θ_i 。

改进的典范分解算法与传统的典范算法相比, 主要改进体现在步骤 1 和步骤 3 上。步骤 1 中, 传统算法的接收快拍不含噪声, 而实际应用中噪声是普遍存在的, 所以改进算法的接收快拍中加入噪声。步骤 2 对接收快拍进行了分组和线性映射, 传统算法得到的 $\bar{\mathbf{Q}}$ 不含噪声, 故在步骤 3 中对其直接求核可以得到含有可行解的 $\bar{\mathbf{M}}^r$, 而改进算法得到的 $\mathbf{Q}$ 中含有噪声, 故在步骤 (3) 中对其协方差矩阵进行 SVD, 利用正交特性得到含有角度信息的 $\mathbf{M}^r$, 剩下步骤两种算法相同。

假设接收快拍不含噪声, 在步骤 3 中对 $\bar{\mathbf{Q}}$ 的协方差矩阵做 SVD, 得到的噪声子空间奇异值均为 0, 然后求解其对应的右特征向量矩阵, 问题等效为 $\bar{\mathbf{Q}}^H \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{V}_1 = 0$ 与直接求核结果一样。因此在无噪声条件下改进算法与传统算法性能一致。

综上所述, 改进算法与传统算法计算复杂度基本相当, 但是传统算法只能应用于无噪声条件, 而改进算法在无噪声和有噪声条件下均适用。

4 仿真实验

仿真实验采用 8 阵元二阶嵌套阵列, 即内部均匀线阵含有 $N_1 = 4$ 个阵元, 各阵元间隔为 d , 外部均匀线阵含有 $N_2 = 4$, 各阵元间隔为 $5d$, 阵元分布集合为 $[d, 2d, 3d, 4d, 5d, 10d, 15d, 20d]$ 。仿真在不同信噪比和快拍次数的情况下, 分别进行 200 次蒙特卡洛实验, 对比 MUSIC、空间平滑和本文所提的改进典范分解算法 DOA 估计结果的均方根误差, 并以克拉美罗下界值作为参考, 定量分析算法估计性能。

实验中信噪比 (SNR)、均方根误差 (E_{RMS}) 和克拉美罗下界值 (CRB_L) 计算式分别为:

$$\text{SNR}[\text{dB}] = 10 \lg\left(\|\mathbf{AS}\|_F^2 / \sigma_n^2\right) \quad (14)$$

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{\text{RM}_C} \sum_{m_c=1}^{M_C} \|\theta - \hat{\theta}_{m_c}\|_F^2} \quad (15)$$

$$\text{CRB}_L(\theta; \sigma^2) = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta; \sigma^2)}{\partial \sigma^2}\right]} \quad (16)$$

其中, $\|\cdot\|_F^2$ 表示二阶范数, R 表示信号个数, M_C 表示蒙特卡洛实验次数, 本文中 $M_C = 200$, $\hat{\theta}_{m_c}$ 表示第 m_c 次实验所得估计角集合。

4.1 仿真实验 1

3 个功率相同的信号分别从 30° 、 45° 、 60° 入射 8 阵元二阶的嵌套阵列, 信源数 $R = 3$, 入射集合 $\theta = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, 快拍次数 $K = 50$, 信噪比从 0 dB 变化到 20 dB, 3 种算法的均方根误差如图 2 所示。

图 2 中, 8 阵元二阶嵌套阵列比 8 阵元均匀线阵列拥有更高的自由度, 因此在相同信噪比和快拍次数的情况下, 8 阵元二阶嵌套阵列的克拉美罗界明显低于 8 阵元均匀线阵列, 体现了相同条件下, 二阶嵌套阵列的性能优越性。对于直接 MUSIC、

空间平滑和改进典范分解算法的均方根误差, 信噪比小于 2 dB 时, 3 种算法均方根误差接近; 而信噪比大于 2 dB 时, 本文所提的改进典范分解算法的均方根误差明显低于其余两种算法; 当信噪比大于 10 dB 时, 改进典范分解算法对 8 阵元二阶嵌套阵列的均方根误差比直接 MUSIC 算法小一个数量级, 且低于 8 阵元均匀线阵的克拉美罗界。图 2 验证了改进典范分解算法对嵌套阵列的可行性和体现出性能优越性。

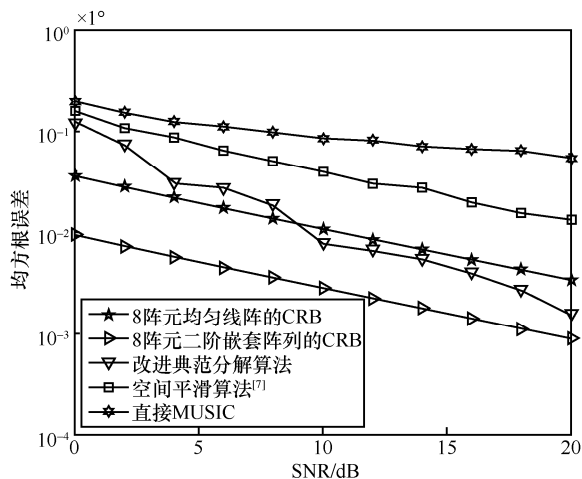


图2 均方根误差随信噪比变化曲线

4.2 仿真实验2

采用仿真1中的入射角度分别为 30° 、 45° 、 60° 的 3 个信号 $\theta = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, 信噪比为 10 dB, 快拍次数从 5 变化到 500, 均方根误差如图 3 所示。

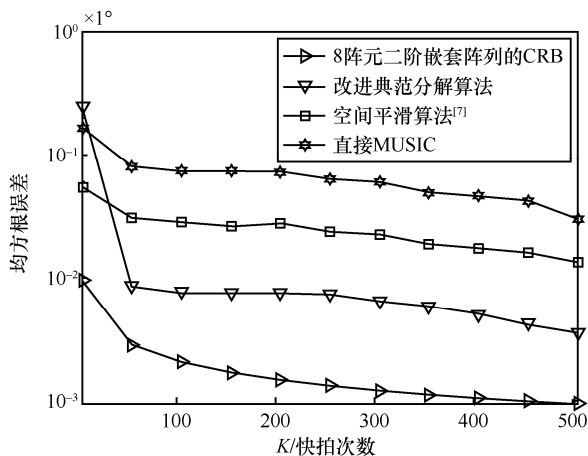


图3 均方根误差随快拍数变化曲线

图 3 中, 当快拍次数小于 50 时, 3 种算法的均方根误差受快拍次数变化影响较大, 当快拍次数大于 50 时, 变化趋势趋于平缓, 而实际情况中快拍数常常高于 50, 在这一区间内 3 种算法的均方根误差受快拍数影响不大。仿真结果表明当信噪比为 10 dB 时, 在相同快拍次数的情况下, 改进典范分解算法均方根误差小于直接 MUSIC 算法和空间平滑算法, 表明所提算法 DOA 估计精度高于另外两种算法。

4.3 仿真实验3

该仿真参考了文献[19]所采用的在相同信噪比和快拍数的前提下, 通过比较运行时间来对比运算复杂度的方式, 使用同一计算机和同一软件 (实验环境: CPU 2.5 GHz, 8 GB RAM, MATLAB R2014a, Windows 8 x64) 对本文所提算法、直接 MUSIC 算法和空间平滑算法, 在快拍数为 200 和信噪比为 10 dB (参考图 2 和图 3, 角度域搜索步长取 0.05°) 的情况下, 分别做 100 次、200 次和 500 次蒙特卡洛分析得到 3 种算法的运行时间, 结果见表 1。从表 1 可以看出, 本文所提算法不需要峰值搜索, 复杂度明显低于直接 MUSIC 算法和空间平滑算法。

表1 算法运行时间比较

算法	实验次数/次		
	100	200	500
本文算法运行时间/s	1.34	2.79	6.52
直接 MUSIC 算法运行时间/s	2.14	4.31	10.33
空间平滑算法运行时间/s	2.86	5.78	14.44

5 结束语

本文结合二阶嵌套阵列含噪信号模型, 首次提出了基于改进典范分解的嵌套阵列 DOA 估计算法。该算法无需进行峰值搜索, 利用局部平移不变特性, 通过张量构造和典范分解求解得到导向量矩阵并求得入射角度。该算法利用 SVD 解将



矩阵 $\mathbf{Q}$ 的协方差矩阵分解为正交的信号子空间和噪声子空间,再利用噪声子空间得到矩阵 $\mathbf{M}^*$, 解决了含噪条件下典范分解算法对嵌套阵列 DOA 估计的问题,且在相同信噪比、快拍数情况下比直接 MUSIC 算法、空间平滑算法有更好的估计性能和更少的运算时间。

参考文献:

- [1] PILLAI S U, BAR-NESS Y, HABER F. A new approach to array geometry for improved spatial spectrum estimation[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1985, 73(10): 1522-1524.
- [2] MOFFET A. Minimum-redundancy linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1968, 16(2): 172-175.
- [3] 盘敏容, 蒋留兵, 车俐, 等. 基于协方差矩阵重构的互质阵列 DOA 估计[J]. *雷达科学与技术*, 2020, 18(1): 1-6, 13.
PAN M R, JIANG L B, CHE L, et al. DOA estimation of coprime array based on covariance matrix reconstruction[J]. *Radar Science and Technology*, 2020, 18(1): 1-6, 13.
- [4] 占成宏, 胡国平, 周豪, 等. 基于虚拟阵元内插的互质阵列目标 DOD 和 DOA 联合估计算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2020, 42(7): 1455-1463.
ZHAN C H, HU G P, ZHOU H, et al. Joint DOD and DOA estimation algorithm for coprime arrays based on virtual array element interpolation[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2020, 42(7): 1455-1463.
- [5] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167-4181.
- [6] LIU C L, VAIDYANATHAN P P. Super nested arrays: linear sparse arrays with reduced mutual coupling—part II: high-order extensions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(16): 4203-4217.
- [7] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Why does direct-MUSIC on sparse-arrays work? [C]//*Proceedings of 2013 Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. Piscataway: IEEE Press, 2013: 2007-2011.
- [8] 刘晓宇, 陈俊丽, 徐略秋. 基于嵌套阵列的一种快速 DOA 估计算法[J]. *电子测量技术*, 2019, 42(23): 111-115.
LIU X Y, CHEN J L, XU L Q. Fast DOA estimation algorithm based on nested array[J]. *Electronic Measurement Technology*, 2019, 42(23): 111-115.
- [9] 王秀, 常青, 王耀力. 基于 L 型阵列酉变换矩阵重构的二维 DOA 估计[J]. *电信科学*, 2018, 34(7): 110-117.
WANG X, CHANG Q, WANG Y L. Two-dimensional DOA estimation of unitary transformation matrix reconstruction based on L-shaped array[J]. *Telecommunications Science*, 2018, 34(7): 110-117.
- [10] 多滨, 罗俊松, 贾勇, 等. 基于子空间分解类算法的高精度频率估计[J]. *电子科技大学学报*, 2020, 49(1): 42-48.
DUO B, LUO J S, JIA Y, et al. High-accuracy frequency estimation based on the class of subspace decomposition algorithms[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2020, 49(1): 42-48.
- [11] SØRENSEN M, DE LATHAUWER L. New uniqueness conditions for the canonical polyadic decomposition of third-order tensors[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2015, 36(4): 1381-1403.
- [12] SORESENSEN M, DOMANOV I, DE L L. Coupled canonical polyadic decompositions and (coupled) decompositions in multilinear rank- $(l_r, n, l_r, n, 1)$ terms: -part II: algorithms[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2015, 36(3): 1015-1045.
- [13] SORESENSEN M, DE L L. Multiple invariance ESPRIT for non-uniform linear arrays: a coupled canonical polyadic decomposition approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(14): 3693-3704.
- [14] STOICA P, NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(5): 720-741.
- [15] SORESENSEN M, DE LATHAUWER L. Coupled tensor decompositions for applications in array signal processing[C]//*Proceedings of 2013 5th IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*. Piscataway: IEEE Press, 2013: 228-231.
- [16] 王宏伟, 谢丽蓉. 基于奇异值分解的非均匀采样非线性系统的模糊模型辨识[J]. *控制与决策*, 2020, 35(3): 757-762.
WANG H W, XIE L R. Identification of fuzzy model of non-uniformly sampled nonlinear systems based on singular value decomposition[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(3): 757-762.
- [17] 龚晓峰, 毛蕾, 林秋华, 等. 基于四阶累积量张量联合对角化的多数据集联合盲源分离[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(3): 509-515.
GONG X F, MAO L, LIN Q H, et al. Joint blind source separation based on joint diagonalization of fourth-order cumulant tensors[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(3): 509-515.
- [18] 李扬, 张伟涛, 楼顺天. 基于联合对角化的声信号深度卷积混合盲分离方法[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(12): 2951-2956.
LI Y, ZHANG W T, LOU S T. Deep convolution blind separation of acoustic signals based on joint diagonalization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(12): 2951-2956.

[19] 司伟建, 万良田, 田作喜. 基于柱面共形阵列天线的快速波达方向估计[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(8): 1589-1595.

SI W J, WAN L T, TIAN Z X. Fast DOA estimation based on cylindrical conformal array antenna[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(8): 1589-1595.

[作者简介]



程思备 (1991-), 男, 重庆信息通信研究院工程师, 主要研究方向为无线电管理、信息通信技术、智能化技术与应用等。



骆晓 (1989-), 男, 重庆信息通信研究院高级工程师, 主要研究方向为无线电管理、信息通信技术、智能化技术与应用等。



蒋博筹 (1997-), 女, 现就职于重庆信息通信研究院, 主要研究方向为无线电管理、信息通信技术、智能化技术与应用等。



王玉婷 (1997-), 女, 现就职于重庆信息通信研究院, 主要研究方向为无线电管理、信息通信技术、智能化技术与应用等。



吴寰宇 (1992-), 男, 现就职于重庆信息通信研究院, 主要研究方向为无线电管理、信息通信技术、智能化技术与应用等。